Esercizi di base

Unità 1. Il metodo assiomatico-deduttivo, gli enti primitivi, gli assiomi

Il metodo assiomatico-deduttivo

1. Disegna un triangolo equilatero. Con il goniometro misura i suoi tre angoli interni: ottieni la stessa misura? Se sì, puoi concludere che un triangolo equilatero ha tutti gli angoli uguali?

2. Disegna un triangolo rettangolo. Sapresti come dimostrare che l'ipotenusa è maggiore di ciascuno dei due cateti?

Gli enti geometrici primitivi. Gli assiomi

3. Supponi che l'Unità 1 riporti, dopo la Definizione 1, la seguente definizione: "Si dice *segmento* l'insieme dei punti di una retta compresi tra due suoi punti detti estremi". La riterresti una definizione corretta?

4. Se la proposizione "Una molecola è un insieme di atomi" fosse un assioma, quali sarebbero gli enti primitivi?

5. Supponi che "padre" e "madre" siano enti primitivi. La proposizione "Si dice che a è figlio di b e c, se b è la madre di a e c è il padre di a" si potrebbe dichiarare come assioma?

6. In ciascuna delle proposizioni seguenti, sottolinea termini che devono essere già stati definiti o che devo no essere stati considerati enti primitivi affinché proposizione abbia significato:
   a) La somma degli angoli esterni di un poligono è u angolo giro.
   b) Un triangolo non può avere più di un angolo rett
   c) Due rette si dicono perpendicolari se sono incide ti e formano quattro angoli retti.
   d) Si dice quadrilatero un poligono di quattro lati.

7. Distingui, tra le proposizioni dell'Esercizio 6, quelle ch esprimono *proprietà* da quelle che definiscono un *ent*

8. Devi spiegare che cosa si intende per assioma. Tra seguenti, qual è la spiegazione sicuramente errata? *In una teoria, un assioma dichiara:*
   a) una proprietà che non viene dimostrata;
   b) una proprietà che non è necessario dimostrare pe ché è evidente che è vera;
   c) una proprietà degli enti primitivi.

9. In una teoria, che cosa si intende per *teorema*?

Unità 2. Assiomi di appartenenza, modelli, teoremi

I modelli. I teoremi

1. Quali tra gli Assiomi da 0 a 3 sono soddisfatti dal modello descritto di seguito e quali no?
Insieme: $\{A, B, C, D\}$; punti: A, B, C, D; rette: $r_1 = \{A, B\}$, $r_2 = \{A, C\}$, $r_3 = \{C, D\}$, $r_4 = \{A, D\}$, $r_5 = \{B, D\}$

2. Considera un modello definito nell'insieme $\{A, B, C, D\}$ i cui punti sono: A, B, C, D. Definisci le rette in modo che il modello non soddisfi l'Assioma 2. $r = \{A\}$

3. Considera un modello definito nell'insieme $\{A, B, C, D\}$ i cui punti sono: A, B, C, D. Definisci le rette in modo che il modello soddisfi gli Assiomi da 0 a 3.

4. Poni in forma condizionale i seguenti enunciati, poi indica qual è l'ipotesi e quale la tesi:
   a) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è il lato maggiore.
   b) Un triangolo equilatero è equiangolo.
   c) Un quadrilatero è un parallelogramma se i lati o posti sono uguali.
   d) La somma di due numeri dispari è pari.
   e) Le diagonali di un rettangolo sono uguali.
   f) Un numero divisibile per 10 è pari.

5. Formula l'enunciato del teorema che ha come ipotesi "un numero è dispari e considero il suo quadrato" e come tesi "il suo quadrato è dispari". Scrivi l'enunciato in forma condizionale e poi forma sintetica, ossia con una proposizione semplice

6. Il modello descritto di seguito non soddisfa tutti gli assiomi. Si può giustificare l'affermazione applicando il Teorema 2 (illustrato nella pagina *Strumenti e attività* dell'Unità 2)?
Insieme: $\{A, B, C, D, E\}$; punti: A, B, C, D, E; rett $r_1 = \{A, C, E\}$, $r_2 = \{B, C\}$, $r_3 = \{C, D\}$

LO SPAZIO DEL TUTOR

Aiuti

1.1. Considera quanto detto nell'Unità di apprendimento a proposito dell'attività sul triangolo isoscele.
a) Sei proprio certo di aver disegnato un triangolo equilatero?
b) Sei proprio certo che le misure siano tutte esatte?
c) La proposizione "Un triangolo equilatero ha tutti gli angoli uguali" esprime in forma sintetica l'affermazione "Ogni triangolo equilatero ha tutti gli angoli uguali" per cui, se anche le domande a) e b) avessero risposte affermative, potresti essere certo che gli stessi risultati si ripeterebbero se considerassi un triangolo equilatero diverso da quello disegnato?

3.2. Considera le rette cui appartengono tre punti e chiediti se, dati tre punti, uno e uno solo tra essi è compreso tra gli altri due: in r_5 è C, in r_6 D. Le altre rette, non contenendo tre punti, non sono rilevanti per l'Assioma 4. Concludiamo che l'Assioma 4 è soddisfatto.

Suggerimenti

1.3. Analizzando la proposizione osserva che: a) non conosci il significato di *compresi*; b) ammesso di accettarlo intuitivamente, sei certo che esistano sulla retta almeno due punti? c) ammesso che almeno due punti esistano, sei certo che sulla retta esistano … ? altri punti

1.5. Considera che un assioma stabilisce una relazione tra gli enti primitivi. Qui, invece, gli enti primitivi sono usati per …

2.2. L'Assioma 2 richiede che a ogni retta appartengano almeno due punti. È sufficiente, quindi, che almeno una retta sia …

2.4. a) Forma condizionale: "*Se* un triangolo è rettangolo *allora* la sua ipotenusa è il lato maggiore". L'ipotesi è "Un triangolo è rettangolo"; la tesi è "La sua ipotenusa è il lato maggiore". b) Nota che la proposizione data contiene un solo predicato nominale (*è equiangolo*), mentre la forma condizionale, essendo formata da due proposizioni, dovrà avere due predicati nominali o verbali. Pertanto, per mettere in forma condizionale, devi aggiungere un opportuno predicato. Questa osservazione vale per tutti gli esercizi di questo tipo.

2.5. Forma sintetica: "Il quadrato di … è dispari".

2.6. Abbiamo dimostrato che: Se valgono gli Assiomi 0, 1, 3, allora vale il Teorema 2. Formuliamo la proposizione contronominale: Se non vale il Teorema 2, allora non vale almeno uno degli Assiomi 0, 1, 3. Sappiamo che una proposizione e la sua contronominale hanno lo stesso valore di verità. Quindi, è vero che se non vale il Teorema 2 allora non vale uno degli Assiomi 0, 1, 3. Nel modello proposto il Teorema 2 non vale perché ..., quindi ...

CONSIGLI

3.1. Rifletti sulla definizione di "punto compreso tra...".

7. Un modello è definito come segue:
Insieme: $\{A, B, C, D, E\}$; punti: A, B, C, D, E
Definisci le rette in modo che *non* valga: a) l'Assioma 1; b) l'Assioma 2; c) l'Assioma 3.

8. Formula l'enunciato del teorema che ha come ipotesi "Due numeri sono dispari e considero la loro somma" e come tesi "La loro somma è pari". Scrivi l'enunciato in forma condizionale e poi in forma sintetica, ossia con una proposizione semplice.

9. Poni in forma condizionale il seguente enunciato: "Le tre mediane di un triangolo equilatero sono uguali".

QUESITI

10. Se in un modello vale il Teorema 2 allora valgono gli Assiomi 0, 1, 3? Giustifica la risposta.

11. Dato un insieme con quattro elementi, è possibile definire un modello in modo che non sia soddisfatto l'Assioma 3? Giustifica la risposta.

12. Se sono soddisfatti gli assiomi di appartenenza, possono esistere rette distinte che hanno più di un punto in comune? Perché? NO

13. Se gli assiomi di appartenenza sono soddisfatti, è vero che o due rette sono incidenti o coincidono? o //

14. Se gli assiomi di appartenenza sono soddisfatti, un punto può appartenere a quattro rette? SI

Unità 3. Assiomi di ordinamento, segmenti, semirette

Gli assiomi di ordinamento

1. Considera il modello implicito descritto nel *Problema* dell'Unità 2: si può affermare che il punto E è compreso tra A e B?

2. Riferendoti al modello citato nell'esercizio precedente, fissa come ordinamento su ogni retta quello che coincide con l'ordine alfabetico dei nomi dati ai suoi punti. Possiamo affermare che l'Assioma 4 è soddisfatto. Perché?

Esercizi di base

Il segmento. La semiretta

3. Sono fissati gli estremi A, B, D di due segmenti distinti AB e CD, *appartenenti alla stessa retta*. Rap-presenta il punto C secondo le indicazioni descritte e completa la corrispondente descrizione.

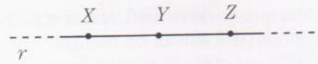
a) Se C coincide con A, AB e CD hanno … punti in comune: $AB \cap CD = \dots$
b) Se C coincide con B, AB e CD hanno … in comune: $AB \cap CD = \dots$
c) Se C è interno ad AB, AB e CD hanno … punti in comune: $AB \cap CD = \dots$
d) Se C è interno a BD, AB e CD punti in comune: $AB \cap CD = \dots$

4. Dimostra che se due segmenti appartenenti alla stessa retta hanno in comune un punto interno allora ne hanno in comune infiniti.

5. Fissa su una retta tre punti distinti A, B, C. Quanti segmenti si vengono a determinare aventi questi punti come estremi? Con quale metodo effettui questo conteggio?

6. Considera il Teorema 4: "Ogni punto P di una retta r è preceduto e seguito da infiniti punti di r". Formula l'enunciato in forma condizionale e individua ipotesi e tesi.

7. Osserva la rappresentazione della retta r e di tre suoi punti X, Y, Z. Quale delle seguenti affermazioni è esatta? a) Z segue X; b) Y precede Z; c) X segue Z.



8. Dimostra il Teorema 4.

9. Dati quattro punti distinti su di una retta: a) quanti segmenti distinti hanno questi punti come estremi? b) quante semirette distinte hanno questi punti come origine? Spiega con quale metodo effettui il conteggio.

QUESITI

10. Se sono soddisfatti gli assiomi di ordinamento, una retta può essere un insieme totalmente ordinato ma finito di punti? Motiva la risposta.

11. Due semirette aventi l'origine in comune coincidono. L'affermazione è vera o falsa? Perché?

12. Due semirette aventi l'origine in comune e appartenenti alla stessa retta coincidono. L'affermazione è vera o falsa? Perché?

13. Due segmenti appartenenti alla stessa retta non sono necessariamente consecutivi o adiacenti. L'affermazione è vera o falsa? Giustifica la risposta.

Unità 4. Fasci propri di rette, piani, semipiani, angoli

Il fascio proprio di rette. Il piano. L'angolo

1. Considera due fasci propri di rette i cui centri siano distinti. I due fasci hanno rette in comune: quante sono? Giustifica la risposta.

2. Dimostra il Teorema 5: "Un punto appartiene a infinite rette". (Vedi la pagina *Strumenti e Attività*.)

3. "Il fascio di rette è una figura che esiste solo se ammettiamo gli assiomi di ordinamento." Questa affermazione è vera?

4. Dimostra il Teorema 6: "Esistono infinite terne di punti non allineati".

5. Considera due rette incidenti r e s. Quali e quante figure individuano?

6. Considera tre rette incidenti in punti distinti. Chiamiamo *regione piana* ciascun sottoinsieme di punti che esse individuano. Quali regioni sono figure definite? Descrivi le regioni che non sono figure conosciute. Quante regioni hai ottenuto complessivamente?

7. Descrivi gli angoli generati da due rette parallele r e s e da una terza retta t incidente, in punti distinti, le prime due. Quanti sono questi angoli? Qualcuno di essi è concavo?

8. Considera una semiretta che ha origine nel vertice di un angolo e che passa per un punto interno all'angolo. Si può dimostrare che tale semiretta è tutta interna all'angolo. Cosa si tratta di dimostrare? Di quale particolare assioma pensi sia una conseguenza?

LO SPAZIO DEL TUTOR

Aiuti

3.3. a) infiniti; AB. b) un estremo; $\{C\}$. c) infiniti; CB. d) non hanno; $\varnothing$.

3.8. Segui la falsariga della dimostrazione del Teorema 3, presentata nella pagina *Strumenti e attività*.
Per l'Assioma 6, su r esistono due punti A e B tali che P è compreso fra di essi: supponiamo che A preceda P e B lo segua;
- tra A e P esistono infiniti punti (Teorema 3);
- i punti compresi tra A e P precedono P.

Quindi, esistono infiniti punti di r che precedono P.
- B segue P. Ragionando in modo analogo, si conclude che esistono infiniti punti che seguono P.

4.2. *Ipotesi:* esiste un punto. *Tesi:* esso appartiene a infinite rette. *Dimostrazione*:
1) Consideriamo un punto qualsiasi P:
- esistono almeno due punti A e B con cui P non è allineato (Assioma 3);
- esiste una e una sola retta r cui appartengono A e B (Assioma 1);
- esiste un punto Q su r compreso tra A e B (Assioma 5);
- esiste una e una sola retta s cui appartengono P e Q.

2) Possiamo considerare infiniti altri punti come Q (Teoremi 3 e 4) e ripetere tutte le considerazioni precedenti. La tesi è così dimostrata.

4.3. L'affermazione è vera, in quanto è necessario dimostrare il Teorema 5 per essere certi che esistano infinite rette passanti per un punto. Ma, per dimostrarlo, sono necessari i Teoremi 3 e 4, che si deducono dagli Assiomi di ordinamento.

5.2. La proposizione qui formulata non chiarisce se l'estremo in comune debba essere l'unico punto in comune. Per affermare senza ambiguità l'esistenza e l'unicità di un oggetto, devi usare l'espressione "uno e uno solo".

Suggerimenti

3.5. Supponi, per semplicità, che i punti siano fissati in ordine alfabetico da sinistra a destra. Considera quante sono le coppie di punti che hanno come primo estremo A: esse sono tante quante i punti che seguono A, ossia sono … Le coppie che hanno come estremo un punto sono tante quante …

4.6. Rappresenta le tre rette; descrivi una regione e assegnale un nome. Per esempio: regione α: intersezione tra il semipiano di origine t che non contiene C e il semipiano generato da s che contiene A.

4.8. Si tratta di dimostrare che non può esistere alcun punto della semiretta che sia …
L'assioma di partizione gioca in questa dimostrazione un ruolo essenziale perché su di esso si basa la definizione di …

5.4. Rivedi la risoluzione del *Problema* proposto nell'Unità di apprendimento e rifletti sul significato dell'espressione "se e solo se". La proposizione potrebbe essere così formulata: "Condizione … affinché due angoli siano adiacenti è che …".

Consigli

3.4. Il metodo più semplice è considerare due segmenti AB e CD distinti della stessa retta ed esaminare tutti i casi che si possono presentare. Puoi procedere come nell'Esercizio 3.

4.4. Segui la falsariga della dimostrazione del Teorema 5.

4.5. Rivedi la risoluzione del *Problema* nell'Unità. Nel diagramma ad albero, individua i rami che ti interessano.

5.1. È sufficiente trovare un controesempio di segmenti che soddisfano la relazione definita nell'esercizio ma non quella della Definizione 8 o viceversa.

Unità 5. Relazioni tra segmenti e tra angoli

Relazioni tra segmenti. Relazioni tra angoli

1. La relazione tra segmenti così definita: "Si dicono consecutivi due segmenti che hanno un punto in comune" non è la stessa individuata dalla Definizione 8. Spiega perché.

2. La relazione tra segmenti così definita: "Si dicono consecutivi due segmenti che hanno un estremo in comune" non è la stessa individuata dalla Definizione 8. Spiega perché.

3. È vero che la somma di due angoli adiacenti è un angolo piatto? Giustifica la risposta.

4. La proposizione "Due angoli sono adiacenti se e solo se sono consecutivi" è falsa. Spiega perché.

5. Considerato l'insieme degli angoli, la condizione "essere adiacenti" è solo sufficiente per "essere consecutivi". Spiega perché.

Esercizi di base

QUESITI

6. La definizione di poligonale sottintende il concetto di insieme ordinato. È possibile, secondo te, dare una definizione che prescinda da questo concetto? Motiva la risposta.
7. La relazione binaria "essere consecutivi", definita nell'insieme dei segmenti, di quali proprietà gode? È una relazione di equivalenza?
8. La relazione binaria "essere adiacenti", definita nell'insieme degli angoli, è una relazione di equivalenza?
9. L'insieme complementare di un angolo piatto non è un angolo. Perché?
10. Quale significato attribuisci alla seguente proposizione: "La condizione 'essere adiacenti' è più restrittiva della condizione 'essere consecutivi'"? La ritieni una proposizione vera? Motiva le risposte.

Unità 6. Congruenza tra figure, assiomi di congruenza, somma e confronto di segmenti

La congruenza tra figure

1. La proposizione "Tutti gli angoli piatti sono congruenti" è un teorema. Dimostralo.
2. "L'Assioma 10 è incompleto in quanto manca la proposizione: 'Tutti i piani sono congruenti'." L'affermazione è falsa. Spiega perché.

La somma di segmenti. Confronto di segmenti

3. Considera un segmento AB e due segmenti a esso adiacenti, congruenti fra loro, AC e BD. Dimostra che $BC \cong AD$.
4. Si dice che un segmento AB è *multiplo* di un segmento CD secondo il numero n, intero positivo, se AB si ottiene sommando CD a se stesso n volte. In tal caso si dice anche che CD è *sottomultiplo* secondo n di AB. Dimostra che multipli secondo lo stesso numero n di segmenti congruenti sono congruenti.
5. Dimostra che se due segmenti sono diversi allora anche i loro doppi lo sono.
6. Applicando il risultato della dimostrazione dell'esercizio precedente, dimostra che le metà di segmenti congruenti sono congruenti.

Unità 7. Angoli particolari, triangoli, poligoni

Angoli particolari

1. Se A è l'insieme degli angoli, la relazione binaria "essere supplementari" è un sottoinsieme di ...
2. Dimostra che tutti gli angoli retti sono congruenti.
3. "Angoli supplementari di angoli congruenti sono congruenti." L'affermazione è vera? Giustifica la risposta.

I triangoli. I poligoni

4. Considera i tre punti non allineati M, N, P. Se il triangolo MNP è dato da $\alpha \cap \beta \cap \gamma$, descrivi i semipiani α, β e γ. Prova a farlo senza aiutarti con la rappresentazione grafica.
5. Fissati tre punti qualsiasi, è sempre possibile costruire uno e un solo triangolo che li abbia come vertici?
6. Indica una procedura per scegliere cinque punti ordinati in modo che congiungendoli si ottenga un poligono convesso.
Generalizza poi la procedura per un numero n qualsiasi di vertici.

QUESITI

7. Sottraendo alla somma di due angoli la loro differenza quale angolo si ottiene? Motiva la risposta.
8. Definiamo *perpendicolari* due rette incidenti che formano un angolo retto.
Come sono gli altri angoli convessi che esse determinano? Giustifica la risposta.
9. Quante diagonali escono da un vertice di un poligono di n lati? Considera i casi n = 3, 4, 5, poi generalizza.

Esercizi di base

LO SPAZIO DEL TUTOR

Aiuti

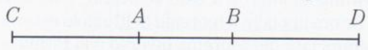
7.3. L'affermazione è vera. Infatti: considera due angoli x e y tali che $x \cong y$; considera gli angoli x' e y' supplementari rispettivamente di x e di y: $x' \cong \pi - x$ e $y' \cong \pi - y$. Quindi, $x' \cong y'$ per l'Assioma 11d.

Suggerimenti

6.1. È sufficiente applicare la definizione di angolo piatto e …

6.2. Il piano è l'insieme ambiente. Non ha senso, quindi, …

6.3. La rappresentazione grafica è la seguente:



L'enunciato in forma condizionale è: "Se due segmenti AC e BD sono conguenti e … allora …". *Ipotesi:* $AC \cong BD$ e … *Tesi:* …
Dimostrazione: Per la definizione …, $BC \cong AB + AC$ e $AD \cong AB + BD$. L'Assioma … permette di dedurre la tesi.

6.5. Se $AB \neq CD$ allora sarà $AB > CD$ o $AB < CD$. È sufficiente considerare uno dei due casi, per esempio $AB < CD$. Segue che esiste un segmento XY tale che $CD \cong AB + XY$, dove XY è per definizione … Quindi, $2CD \cong$ …

7.4. Ricorda la Definizione 24 e, poi, ragiona così: α è il semipiano che ha come origine la retta passante per M e N e che contiene P, β è il semipiano HN che contiene …

7.6. a) Scelgo tre punti A_1, A_2, A_3 non allineati; b) Scelgo il punto A_4 tra i punti interni dell'angolo $A_1\widehat{A_2}A_3$ ed esterni al triangolo $A_1A_2A_3$. c) Scelgo il punto …

8.1. Esegui la rappresentazione grafica, seguendo la descrizione. Scrivi l'enunciato in forma condizionale: "Se ABC è un triangolo e C, M, D sono allineati e $AM \cong MB$ allora $BD \cong AC$". Scrivi in forma sintetica l'ipotesi e la tesi.
Ipotesi: 1) A, B, C non allineati; 2) C, M, D allineati (puoi anche scrivere: $\cong \pi$); 3) $AM \cong MB$.
Tesi: $AC \cong BD$.
I segmenti BD e AC sono lati dei triangoli ACM e BDM. Se riesci a dimostrare che questi triangoli sono congruenti e se BD e AC sono elementi corrispondenti, allora …
Dimostrazione: Confronta i triangoli ACM e BDM. Essi hanno: $AM \cong MB$ per …; $CM \cong MD$ per …; perché angoli … I due triangoli sono congruenti per il … avendo … Quindi, …

8.3. Esegui la rappresentazione grafica. Si tratta di dimostrare che MNQ ha una coppia di lati congruenti. Osservando la figura, risulta spontaneo scegliere la coppia MQ e MN. Procedi come nell'Esercizio 1: scrivi l'enunciato in forma condizionale; scrivi ipotesi e tesi in forma sintetica; individua due triangoli che abbiano, rispettivamente, MQ e MN come lati. I triangoli sono … Si può dimostrare che essi sono congruenti? Se sì, MQ e MN sono lati corrispondenti dei due triangoli?

Consigli

7.2. Devi prima dimostrare che metà di ... Puoi ragionare in modo analogo a quanto è stato fatto per i segmenti nell'Unità 6.

8.5. Dimostrare che il triangolo è isoscele significa dimostrare che ha due lati congruenti. Osserva la figura: i lati congruenti dovrebbero essere … Considera due triangoli che abbiano come lati questi due segmenti.

Unità 8. Primo criterio di congruenza dei triangoli. Triangoli particolari, triangolo isoscele

Congruenza di triangoli

1. Considera un triangolo ABC e il punto medio M del lato AB. Sulla semiretta CM fissa il segmento MD congruente a CM. Dimostra che $BD \cong AC$.

2. Dimostra che, congiungendo i punti medi di due lati corrispondenti di due triangoli congruenti con il rispettivo vertice opposto, si ottengono segmenti congruenti.

Triangoli particolari e triangolo isoscele

3. Considera il triangolo isoscele ABC di base AB e i punti medi dei suoi lati: M di AB, N di BC e Q di AC. Dimostra che il triangolo MNQ è isoscele.

4. Un triangolo ABC è isoscele sulla base AB. Quali sono gli angoli esterni del triangolo tra loro congruenti? Giustifica la risposta.

5. Un triangolo è isoscele sulla base AB. Sulla retta cui appartiene la base, considera le due semirette, rispettivamente, di origine B che non contiene A e di origine A che non contiene B. Esse si dicono *prolungamenti* di AB. Su tali prolungamenti considera due segmenti AD e BE congruenti tra loro. Dimostra che il triangolo CDE è anch'esso isoscele.