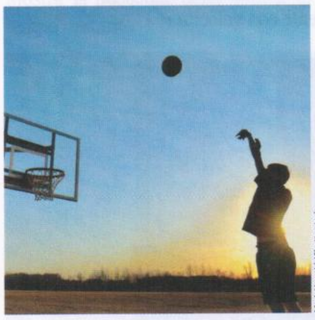
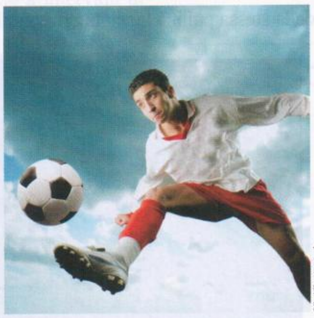
3 Il moto di caduta libera dei proiettili

Un corpo lanciato con una velocità iniziale $\vec{v}_0$ è detto **proiettile**. Esempi di proiettile sono...

1 ... un pallone da basket in un tiro a canestro.



2 ... un pallone da calcio in una rimessa da fondocampo.



3 ... le bombe di lava incandescente eruttate da un vulcano.

Quando la resistenza dell'aria è trascurabile, il proiettile segue una traiettoria durante la quale l'unica accelerazione di cui risente è quella di gravità. Quindi,

se si trascurano gli effetti della resistenza dell'aria, un proiettile compie un moto di **caduta libera**.

Nel seguito studiamo il moto di caduta libera di un proiettile con le seguenti ipotesi:

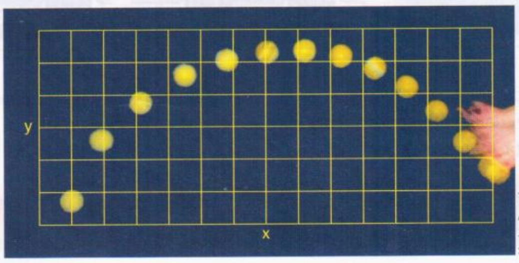
- gli effetti dell'aria sono trascurabili;
- l'accelerazione di gravità è costante, è diretta verso il basso e ha modulo $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

Indipendenza dei moti

La foto seguente mostra una pallina lanciata verso l'alto e fotografata a intervalli di tempo $\Delta t = 0{,}02$ s.

1 Lungo l'asse x la pallina percorre spazi uguali in tempi uguali. Il moto orizzontale della pallina è un moto uniforme.

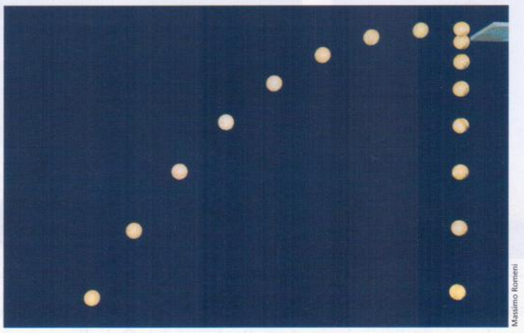
2 Lungo l'asse y, a mano a mano che sale, la pallina percorre sempre meno spazio per ogni Δt. Come confermano misurazioni più precise, il moto verticale della pallina è un moto uniformemente accelerato.



In generale vale quanto segue.

L'esperienza dimostra che i moti orizzontale e verticale di un proiettile sono indipendenti. Il moto orizzontale è un moto con velocità costante, mentre quello verticale è un moto con accelerazione costante g.

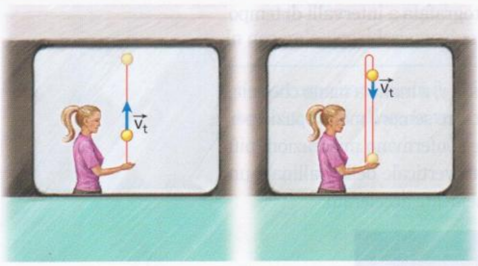
Una pallina che cade da ferma descrive un moto verticale (con accelerazione g) che è identico a quello della stessa pallina lanciata orizzontalmente con velocità v.



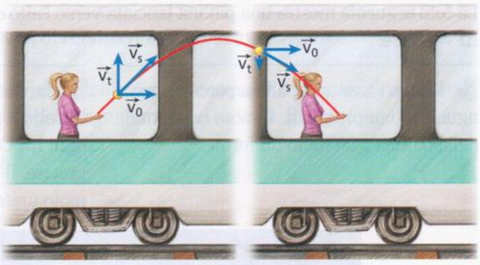
MINDBUILDING Un esperimento mentale

Per rendersi conto che il moto verticale di un proiettile avviene con accelerazione g, consideriamo il seguente esperimento mentale. Una ragazza lancia una pallina verso l'alto mentre il suo treno viaggia a velocità costante.

1 Vista dal treno, la pallina è un proiettile lasciato cadere che effettua un moto uniformemente accelerato. In ogni istante di volo, la sua velocità $\vec{v}_t$ è verticale.



2 Vista dalla stazione, la pallina è un proiettile in direzione obliqua, perché è lanciata verso l'alto e contemporaneamente si sposta con la velocità orizzontale $\vec{v}_0$ del treno. Per la (5), la sua velocità vista dalla stazione è $\vec{v}_s = \vec{v}_t + \vec{v}_0$.

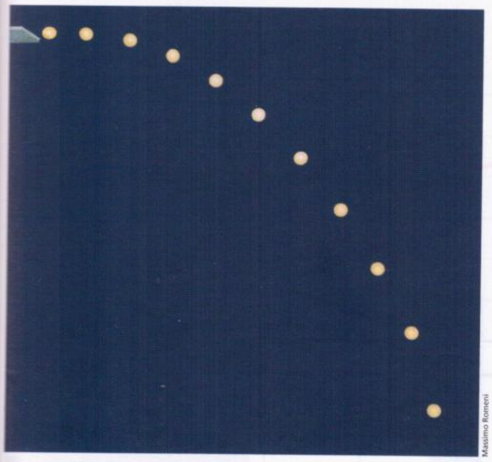


La velocità $\vec{v}_0$ del treno rispetto alla stazione è orizzontale, per cui la componente verticale della velocità $\vec{v}_s$ della pallina vista dalla stazione è sempre $\vec{v}_t$, cioè proprio la velocità della pallina misurata sul treno. Si conclude che

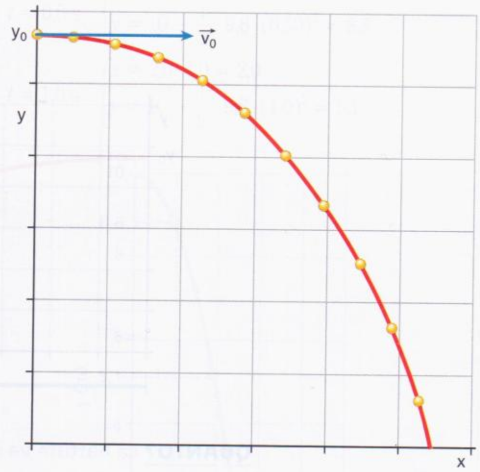
il moto verticale di un proiettile lasciato cadere è uguale a quello di un proiettile lanciato in direzione obliqua.

4 Moto di un proiettile lanciato in direzione orizzontale

1 Consideriamo una pallina che esce dal bordo di un tavolo con velocità orizzontale $\vec{v}_0$. La foto stroboscopica mostra la posizione della pallina in volo a intervalli di tempo costante.



2 Il grafico del moto della pallina è quello rappresentato in figura.



Nel sistema di riferimento scelto, le equazioni del moto sono le seguenti.

	Spazio-tempo	Velocità-tempo
Moto uniforme lungo x	$x = v_0 t$	$v_x = v_0$
Moto uniformemente accelerato lungo y	$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$	$v_y = -gt$

A partire da queste equazioni si può risolvere qualunque problema relativo al moto del proiettile lanciato in direzione orizzontale.

IN LABORATORIO

La composizione dei moti - 1

- Vdeo (1 minuto)
- Test (3 domande)

Il tempo di volo

Il tempo durante il quale il proiettile resta in aria, o **tempo di volo** t_v, dipende dall'altezza iniziale. Infatti, la caduta lungo l'asse y ha termine quando l'ordinata del proiettile è $y = 0$. Inserendo questo valore nell'equazione spazio-tempo dell'asse y si ha:

$$0 = y_0 - \frac{1}{2}gt_v^2$$

e quindi

$$t_v = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} \qquad (7)$$

Nel caso in cui il proiettile atterri in un punto con quota y_1, nell'equazione precedente si sostituisce y_0 con $y_0 - y_1$.

La gittata

La **gittata** è la distanza orizzontale fra il punto di lancio e il punto di arrivo del proiettile. Per calcolarla si utilizza l'indipendenza dei moti orizzontale e verticale.

- Asse x: mentre è in aria, il proiettile avanza con la velocità iniziale v_0.
- Asse y: per arrivare alla quota $y = 0$ il proiettile rimane in aria per il tempo di volo $t_v = \sqrt{2y_0/g}$. Quindi la gittata del proiettile è $G = v_0 t_v$ cioè

$$G = v_0\sqrt{\frac{2y_0}{g}} \tag{8}$$

QUANTO? La battuta va in rete?

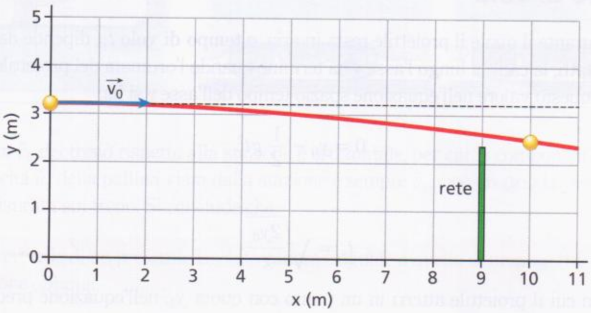
Il giocatore mostrato nella fotografia, stando a 9 m dalla rete, colpisce la palla a 3,2 m di altezza, circa 80 cm sopra la rete, e imprime a essa una velocità orizzontale di 90 km/h (25 m/s). La palla scende di 80 cm nel tempo di volo, che è

$$t_v = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2\,(0{,}8\ \text{m})}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = 0{,}4\ \text{s}$$

La gittata durante il tempo di volo è

$$G = v_0 t_v = (25\ \text{m/s})(0{,}4\ \text{s}) = 1 \cdot 10\ \text{m}$$

A 10 m dal punto di battuta, la palla è più bassa di 80 cm. Quindi la palla non va in rete, ma la sfiora.



L'equazione della traiettoria

Una pallina da tennis viene lanciata da un terrazzo, posto a 10 m di altezza, con una velocità orizzontale $v_0 = 2{,}0$ m/s.

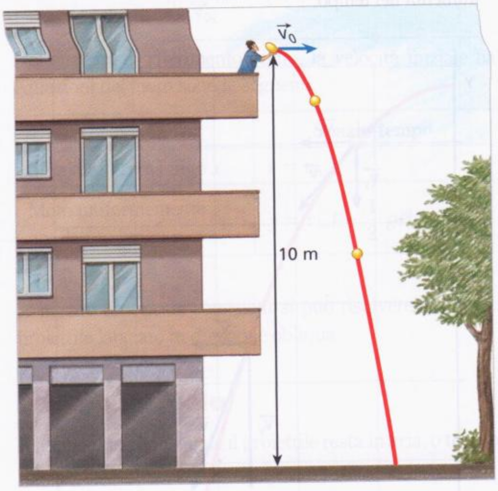
1 Per semplicità scriviamo le equazioni del moto della pallina senza le unità di misura:

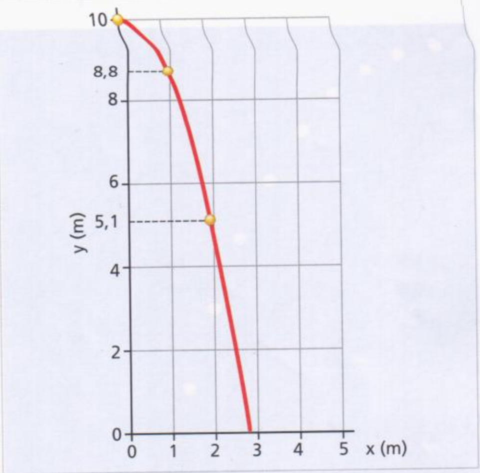
$$x = 2{,}0 \cdot t$$
$$y = 10 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t^2$$

2 Le coordinate della pallina per $t = 0{,}50$ s e $t = 1{,}0$ s sono:

$$t = 0{,}5 \text{ s} \quad \begin{cases} x = 2{,}0 \cdot 0{,}50 = 1{,}0 \\ y = 10 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot (0{,}50)^2 = 8{,}8 \end{cases}$$

$$t = 1{,}0 \text{ s} \quad \begin{cases} x = 2{,}0 \cdot 1{,}0 = 2{,}0 \\ y = 10 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot (1{,}0)^2 = 5{,}1 \end{cases}$$





In linea di principio, con questo metodo si possono calcolare le coordinate di tutti i punti della traiettoria.

Risulta però più interessante determinare l'equazione della traiettoria, cioè la relazione che lega direttamente fra loro le coordinate x e y di ogni punto della traiettoria.

A partire dalle relazioni

$$x = v_0 t$$
$$y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

esplicitiamo t nella prima equazione e sostituiamolo nella seconda:

$$t = \frac{x}{v_0} \Rightarrow y = y_0 - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

L'equazione della traiettoria è

$$y = y_0 - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} x^2 \qquad (9)$$

Nel piano x-y l'equazione rappresenta una parabola con il vertice nel punto $(0, y_0)$ e la concavità rivolta verso il basso.

La velocità del proiettile

Durante la caduta, la velocità di un proiettile aumenta.

1 Poiché il flash illumina la scena a intervalli costanti di tempo, l'aumento degli spostamenti compiuti dalla pallina con il passare del tempo dipende dal fatto che aumenta la velocità durante la caduta.

2 La componente orizzontale della velocità rimane costante:

$$v_x = v_0$$

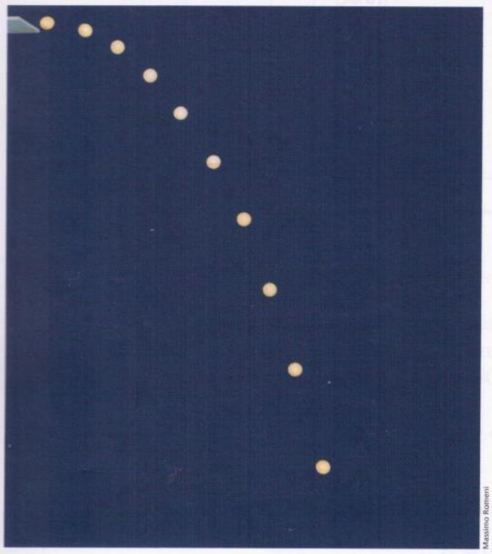
ma quella verticale cambia nel tempo:

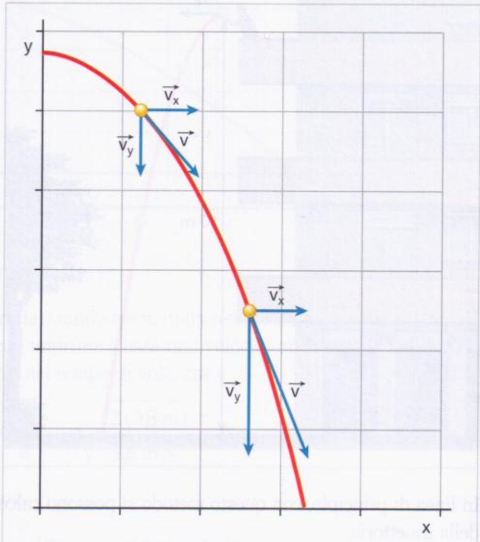
$$v_y = -gt$$

Quindi il modulo della velocità

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

aumenta nel tempo.





Il modulo della velocità aumenta nel tempo secondo la relazione

$$v = \sqrt{v_x^2 + g^2 t^2}$$

QUANTO? Con quale velocità tocca terra?

Una pallina, lanciata a 3 m/s su un tavolo orizzontale alto 80 cm, supera il bordo e arriva a terra con:

- una velocità orizzontale di 3 m/s;
- una velocità verticale di $\sqrt{\dfrac{2\,(0{,}8\text{ m})}{9{,}8\text{ m/s}^2}}\,(9{,}8\text{ m/s}^2) = 4\text{ m/s}$;
- una velocità totale di $\sqrt{(3\text{ m/s})^2 + (4\text{ m/s})^2} = 5\text{ m/s}$.

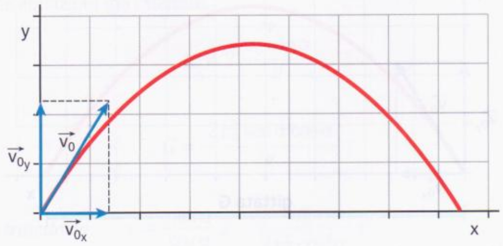
Andreuzzi

5 Moto di un proiettile lanciato in direzione obliqua

IN LABORATORIO

La composizione dei moti - 2
- Vdeo (1 minuto)
- Test (3 domande)

Una pallina è lanciata dall'origine in direzione obliqua con una velocità iniziale $\vec{v}_0$.



Nel sistema di riferimento scelto, la velocità iniziale ha componenti $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$ e le equazioni del moto sono le seguenti.

	Spazio-tempo	Velocità-tempo
Moto uniforme lungo x	$x = v_{0x}t$	$v_x = v_{0x}$
Moto uniformemente accelerato lungo y	$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$	$v_y = v_{0y} - gt$

(10)

A partire da queste equazioni si può risolvere qualunque problema relativo al moto del proiettile lanciato in direzione obliqua.

Il tempo di volo

Il tempo durante il quale il proiettile resta in aria, o **tempo di volo** t_v, dipende dalla velocità iniziale nella direzione y.

Consideriamo il caso in cui il punto di atterraggio è alla stessa altezza del punto di lancio $y = 0$. La caduta lungo l'asse y termina quando l'ordinata del proiettile è $y = 0$; inserendo questo valore nell'equazione spazio-tempo dell'asse y si ottiene l'equazione nell'incognita t:

$$0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t\left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt\right) = 0$$

che ha come soluzioni

$$t = 0 \quad \text{e} \quad t = 2\frac{v_{0y}}{g}$$

La prima soluzione corrisponde all'istante del lancio, mentre la seconda dà il tempo di volo:

$$t_v = 2\frac{v_{0y}}{g} \tag{11}$$

In alternativa, si può ragionare nel modo seguente. Il proiettile sale fino a quando la sua velocità verticale si annulla e ciò avviene per

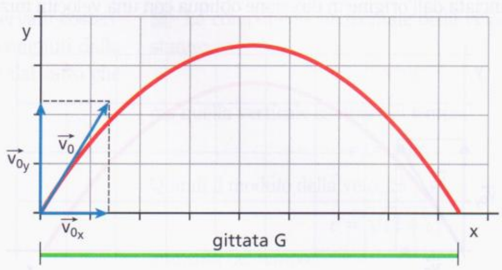
$$0 = v_{0y} - gt_s \Rightarrow t_s = \frac{v_{0y}}{g}$$

Il tempo di volo è il doppio del tempo di salita t_s, per cui si riottiene la (11):

$$t_v = 2t_s = 2\frac{v_{0y}}{g}$$

La gittata

Consideriamo il caso in cui il proiettile atterra in un punto con la stessa quota del punto di lancio.



I moti orizzontale e verticale sono indipendenti, perciò lungo gli assi x e y abbiamo la seguente situazione:

- Asse x: mentre è in aria, il proiettile avanza con la velocità iniziale v_0.
- Asse y: per arrivare alla quota $y = 0$ il proiettile rimane in aria per il tempo di volo

$$t_v = \frac{2\,v_{0y}}{g}$$

Quindi la gittata del proiettile è $G = v_{0x} t_v$, cioè

$$G = \frac{2\,v_{0x} v_{0y}}{g} \qquad (12)$$

L'equazione della traiettoria

A partire dalle equazioni (10) del moto

$$x = v_{0x} t \qquad y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

si determina l'equazione della traiettoria del proiettile.

Esplicitiamo t nella prima equazione e sostituiamo il valore trovato nella seconda:

$$t = \frac{x}{v_{0x}} \;\Rightarrow\; y = v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2$$

L'equazione della traiettoria è

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2 v_{0x}^2} x^2 \qquad (13)$$

I valori di v_{0x}, v_{0y} e g sono costanti durante il moto, quindi l'equazione rappresenta, nel piano x-y, una parabola del tipo

$$y = -ax^2 + bx$$

passante per $(0, 0)$ e con la concavità rivolta verso il basso.

L'angolo di lancio

Le proprietà del moto di un proiettile possono essere espresse in termini di due grandezze fondamentali al momento del lancio: il modulo della velocità iniziale v_0 e l'angolo di lancio α.

Basta esprimere le componenti v_{0x} e v_{0y} della velocità iniziale in termini di v_0 e α, cioè

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$

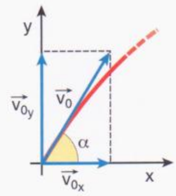
$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha$$

e sostituirle nelle equazioni già ottenute:

tempo di volo $$t_v = 2\,\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} \tag{14}$$

gittata $$G = \frac{2\,v_0^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{g} \tag{15}$$

equazione della traiettoria $$y = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\,x - \frac{g}{2\,v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2 \tag{16}$$



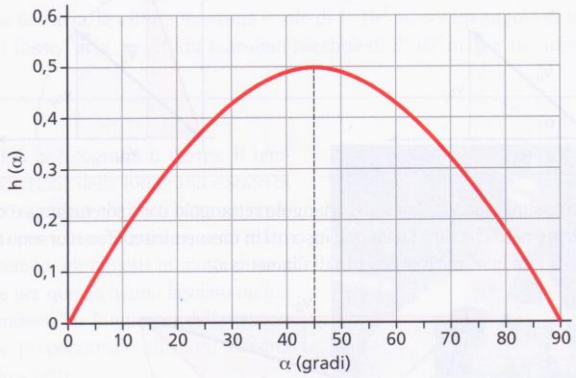
$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$
$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha$

La gittata massima

Per una data velocità iniziale v_0, la gittata varia al variare dell'angolo di lancio α. Fissati i valori di v_0 e g, la gittata dipende dal valore della funzione $h(\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$:

$$G = \frac{2\,v_0^2}{g}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad G = \frac{2\,v_0^2}{g}h(\alpha)$$

Per valori dell'angolo di lancio compresi fra 0° e 90°, il grafico della funzione h è il seguente.



La funzione h:

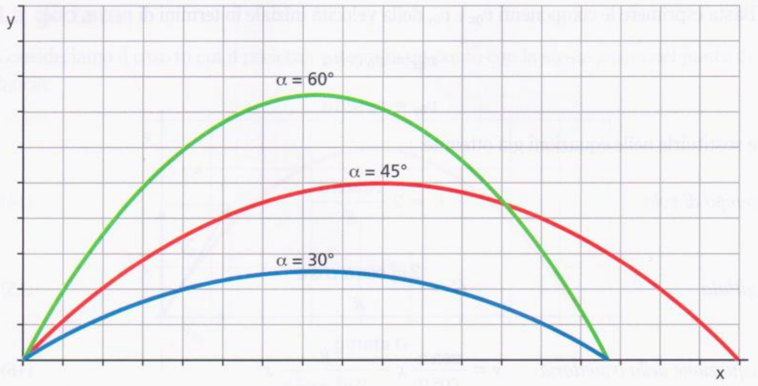
- assume il valore massimo per $\alpha = 45°$: $h(45°) = 0{,}5$;
- è simmetrica rispetto ad $\alpha = 45°$: per ogni valore $0 < \alpha < 45°$, si ha $h(45° - \alpha) = h(45° + \alpha)$.

Quindi:

- per una data velocità di lancio v_0, la gittata massima è

$$G_{max} = \frac{2\,v_0^2}{g}\cdot 0{,}5 = \frac{v_0^2}{g}$$

- la gittata è la stessa per angoli simmetrici rispetto a 45°, come mostra la figura alla pagina seguente.

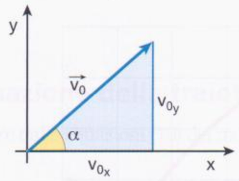


MINDBUILDING Una dimostrazione geometrica

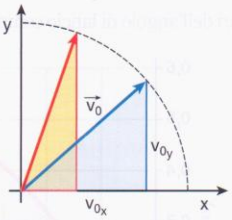
Il valore della gittata dipende dal prodotto $v_{0x}v_{0y}$ delle componenti della velocità iniziale v_0.

1 Questo prodotto ha una semplice interpretazione geometrica: è il doppio dell'area A del triangolo rettangolo colorato, avente ipotenusa v_0, cioè

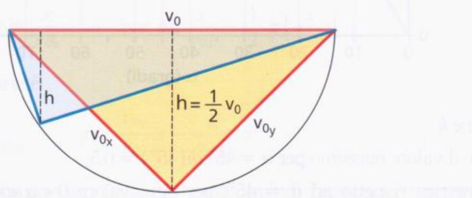
$$v_{0x}v_{0y} = 2A$$



2 Al variare dell'angolo α, cambia l'area dei triangoli rettangoli con ipotenusa v_0.



La gittata è massima quando l'area del triangolo rettangolo con ipotenusa v_0 è massima. Dalla geometria è noto che tutti i triangoli inscritti in una semicirconferenza sono rettangoli. Costruiamo allora la semicirconferenza di diametro v_0.



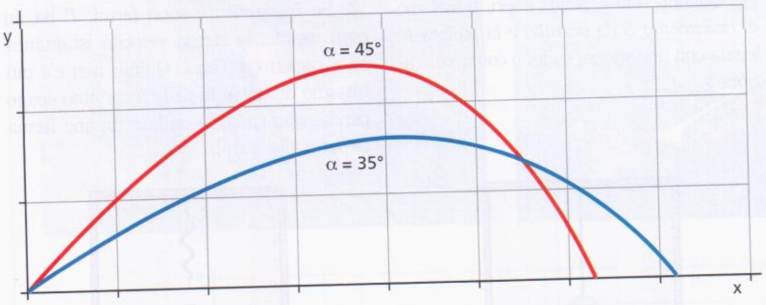
L'area dei triangoli inscritti è $A = (1/2)\,v_0 h$. Il triangolo con h maggiore ha l'area massima. L'altezza massima è $h_{max} = (1/2)v_0$ nel caso del triangolo rettangolo isoscele, quindi l'area massima è $A_{max} = (1/2)v_0 \cdot (1/2)v_0 = (1/4)v_0^2$. Ricordando che $v_{0x}v_{0y} = 2A_{max}$ si ha:

$$G_{max} = \frac{2\,v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{2 \cdot 2A_{max}}{g} = \frac{4}{g}\,\frac{1}{4}\,v_0^2 \quad \Rightarrow \quad G_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

La massima gittata si ha quando $v_{0x} = v_{0y}$ cioè quando l'angolo di lancio è 45°.

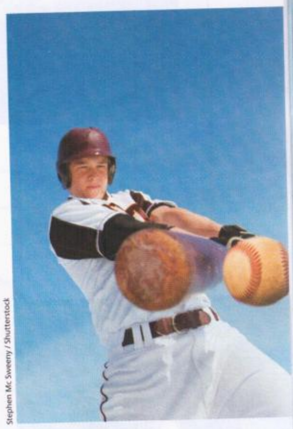
Gli effetti dell'aria

Nella realtà, l'aria provoca sul moto dei proiettili effetti non trascurabili: il più evidente è la diminuzione della gittata. Questo effetto è dovuto al fatto che un proiettile non è in caduta libera. La resistenza dell'aria provoca una decelerazione sul proiettile che ne rallenta il moto. Questa decelerazione cresce al crescere della velocità del proiettile. Inoltre il suo effetto aumenta all'aumentare del tempo di volo. Per questa ragione la gittata massima in presenza d'aria si ha per angoli minori di 45°, in genere tra i 30° e i 35°.



QUANTO? L'effetto dell'aria

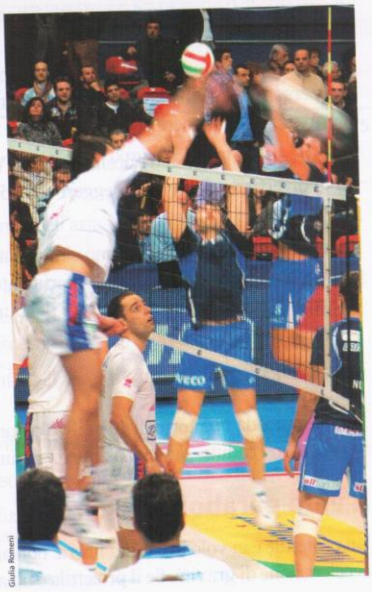
Durante una partita di baseball, una palla colpita dalla mazza viene lanciata alla velocità di 160 km/h. Trascuriamo gli effetti dovuti allo spin (rotazione) della palla. A causa della resistenza dell'aria, la gittata massima è solo di $1 \cdot 10^2$ m, per un angolo di lancio di 38°. Se non ci fosse l'aria, la gittata massima sarebbe di $2 \cdot 10^2$ m, per un angolo di lancio di 45°.



Stephen Mc Sweeny / Shutterstock

Osserviamo la fotografia a destra. Il tempo di esposizione della fotografia è stato di 1/25 s: ciò significa che l'otturatore è rimasto aperto per 0,04 s. Durante questo intervallo di tempo, gli oggetti in moto si sono spostati e per questo hanno lasciato un'immagine mossa. La lunghezza della traccia lasciata è proporzionale alla loro velocità durante lo scatto.

- Il palleggiatore con la maglia blu alza la palla con velocità molto piccola.
- Lo schiacciatore colpisce con violenza la palla, che si muove con moto parabolico verso il basso con grande velocità.
- La mano dello schiacciatore ha una velocità maggiore del suo gomito.
- Il corpo dello schiacciatore è praticamente fermo, perché è stato colto nel punto più alto della sua traiettoria, dove la velocità si annulla e cambia verso.



Giulia Romeni